排队（queue）

题目要求最终排列的每个不是本身的前缀都不是排列。

注意到每次交换至多会减少一个是排列的前缀。因此最少操作次数就是这样的前缀个数。

至于最小字典序，直接从前往后操作即可。

时间复杂度 $O(n)$。

冲刺（sprint）

倒着考虑冲刺过程，发现是每个点向左边第一个 `R`、右边第一个 `L`、上边第一个 `D`、下边第一个 `U` 连边。

直接搜索，可以用 `bfs` 也可以用 `dfs`。

时间复杂度 $O(nm)$。

蛋糕（cake）

解法一

注意到答案相当于：对每个长度为 $2m$ 的合法括号序列，将其分为 $n+1$ 段（每段可以为空），要求每段内不能同时含有左右括号，求方案数之和。

发现一个括号序列的划分方案数只和其中 `()` 子串的个数有关，画出格路，就是只和拐弯次数有关。不妨称 `()` 子串在格路中对应一个“拐点”，则要对每个 k 求：从 $(0,0)$ 到 (n,n)，恰好有 k 个拐点，且始终有 $x\le y$ 的格路个数。

先考虑如果没有 $x\le y$ 的限制怎么做。只要在两个坐标上分别选 k 个“拐点”的位置，就唯一对应一条格路。显然方案数是 $\binom{n}{k}^2$。这启发我们对“拐点坐标”构成的序列进行计数，而非对格路进行计数。

设拐点坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k)$。于是我们要减去存在某个拐点满足 $y_i<x_{i+1}$ 的格路数。不妨假设 i 是第一个 $y_i<x_{i+1}$ 的拐点。那么这样的路径满足的充要条件是：

$$0\le x_1<x_2<\cdots<x_i<y_{i+1}<y_{i+2}<\cdots y_k\le n$$

且

$$0<y_1<y_2<\cdots<y_i<x_{i+1}<x_{i+2}<\cdots x_k<n$$

因此方案数为 $\binom{n+1}{k}\binom{n-1}{k}$。

总时间复杂度为 $O(n)$。

解法二

对 a 序列进行差分，得到长度为 $n+1$ 的序列 b。限制变为 b 的任意前缀和都 ≥ 0，且 b 中所有数之和 $=0$，绝对值之和 $=2m$。

将 b_1 改为 b_1+1，限制变为 b 的任意前缀和都 >0，且 b 中所有数之和 $=1$，绝对值之和 $=2m+1$。

> Raney 引理：如果 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是一个和为 1 的整数序列，则其所有循环位移中恰好有一个满足所有的前缀和都是正数。
>
> 证明：考虑重复这个序列，生成一个无限数列。这个数列的“平均斜率”是 $\frac{1}{k}$，并且整个图象会被夹在两条斜率为 $\frac{1}{k}$ 的直线之间，并且每条直线与图象恰好有一个切点（因为直线在每个周期内与整点只接触一次）。循环位移的起始点能且只能取下界直线的切点。

因此只需统计和为 1 且绝对值之和为 $2m+1$ 的序列个数，最后除以 $n+1$ 即可。枚举负数的个数 i，方案数是 $\binom{m-1}{i-1}\binom{m+1+n-i}{n-i}\binom{n+1}{i}$。

神奇的是，两种做法推出来的式子完全不一样，但却是相等的。

魔法（magic）

用 `set` 维护所有连续段。将元素重标号，可以使得一段“连续段”的标号为 $O(1)$ 个区间。在 L 和 R 处的不完整连续段可以直接查询。

现在我们需要支持增删连续段，询问被 $[L,R]$ 包含的连续段中，有多少个对应的区间包含 x。

很不好做，先上个线段树分治。注意这里的线段树分治与平常的不一样，并非在叶子节点处理询问，而是在每个线段树节点上对“放在这个节点上的所有修改”和“这个节点代表的区间内所有询问”进行处理。你也可以理解成 CDQ 分治。

现在问题变成，给定若干连续段，询问被 $[L,R]$ 包含的连续段中，有多少个对应的区间包含 x。

还是不好做，但是观察到每次处理的连续段不交，所以“被 $[L,R]$ 包含”是一维偏序。

这样问题就变成，在坐标系上给定若干条平行于 x 轴的线和平行于 y 轴的线，查询每条平行于 x 轴的线与多少条平行于 y 轴的线相交。

这是可以用扫描线计算的。

总复杂度为 $O(n\log^2 n)$。