20250325题解

A

首先，我们可以先想一想当 n=2 时，若小组内两头奶牛都喜欢同种类型的干草则有解；当 n=3 时，则当组内有任意两头奶牛喜欢同种类型的干草时有解。

然后很容易即可推出，若奶牛 i−1 和奶牛 i 或 奶牛 i 和奶牛 i−2 喜欢同类型的干草，那么奶牛 i−2，奶牛 i−1 和奶牛 i 将可以同时喜欢奶牛 i 所喜欢的干草类型。

而对于任何奶牛数大于 3 的焦点访谈小组，我们一定能从中找到一个有 3 头奶牛的焦点访谈小组。若有干草类型满足上面推导的关系，则这种类型的干草将可以受到所有奶牛的喜爱。否则就不满足。

B

暴力跳的做法是平凡的，但是过不去。我们考虑最坏的情况来分析暴力的复杂度。

想尽可能多的让跳的次数更多，只可能是左右来回反复横跳，即在左右两边放置两个跳板，其余地方是炮击目标。能量越大，跳过一遍的次数就越少，所以我们要让能量增长的幅度尽可能地减小。

当两边的跳板 v=0 时，这样是会死循环的！所以，我们要加一个剪枝，以所在位置 i，来到这个位置时的方向 d，来到这个位置时的能量 k 作为一个状态三元组 (i,d,k)，丢进一个 map 里面打标记。如果当前状态以前已经经过了，就退出。不难证明这个三元组定了接下来发生的事情就都定了，有一道好题也用了这个思路。

我们估算一下跳跃次数，当v=1时，要跳的次数大概是n/1+n/2+n/3+...+n/n=O(n logn)，由于上面的剪枝需要用map又带一个log，故总时间复杂度O(nlog^2n)。

C

先将原序列转化为差分序列，即d[i]=a[i]-a[i-1]，d[1]=a[1]。

这样每次操作相当于选择一个x，将d[x..n]同时加1或者减1，求使得d全部为0的最小操作次数。

考虑左到右调整，维护一个全局加的变量sum记录右侧的总变化量，在修改d[i]时先加上sum，修改量也同步到sum里面，边扫描边统计修改次数就做完了。

D

考虑限制(x,y)的本质是什么，根据题意可知max(c[i])<c[y],i=1,2,...,x，且c[k]<max(c[i]),k=x+1,...,y-1,i=1,2,...,x。也就是说c[y]是严格前缀最大值，且c[x+1]到c[y-1]中没有前缀最大值。

于是可以O(n)求出数组b，b[i]=-1/0/1表示c[i]不可能/可能/一定是前缀最大值，或者推出矛盾（即b[i]同时是1和-1）。

接下来考虑构造，先考虑所有c[i]都不确定的情况，这是简单的，b[i]=1时令c[i]为前面的最大值+1，否则令c[i]=1即可。

如果当前c[i]已确定，考虑判断合法性。

1. 如果b[i]=1且c[i]比前面某个值小，那一定无解，因为我们在最小化字典序的同时最小化了前缀max。
2. 如果b[i]=-1且c[i]是前缀最大值，那么我们考虑往前找到最大的一个p使得c[p]未确定且b[p]!=-1，令c[p]=c[i]来满足c[i]的限制。如果找不到这样的p则无解，调整后如果c[p]和[p+1,i-1]之间的某个位置冲突也一定无解，否则就可能有解，继续调整。

因此构造是O(n)的。

E

两个方法：贪心和树形DP。

贪心：

显然最大遍历次数就是叶子结点的个数，设为x，那么只有前x个药水会被捡到。贪心的过程就相当于把每个叶子的所有祖先节点上会出现的药水往叶子上填，每个叶子只能填一个药水，而且填的这个药水出现的节点位置要尽可能深。这个过程我们可以用栈来模拟，栈中存储药水出现的位置，当我们要离开某一节点时，就把这个节点上还未被填入叶子的药水从栈中弹出即可。

树形DP：

记dp[i]为以i为根的子树内最多能拿到的药水数量，lf[i]为以i为根的子树内的叶子结点数量，则有dp[i]=min(sum(dp[son[i]]),lf[i])，直接树形DP输出dp[1]即可。

F

首先枚举的范围是[1,min(a[i])/4]，但这范围还是太大。

注意到重复的数字对答案没影响，先去重。

由于要求不同的a[i] mod L的值的数量不大于3，那么对于n>=4时，必然要有a[i]和a[j]满足L|(a[i]-a[j])。

对于去重后不小于4的n，对剩下的数组排序之后，对前四个数两两作差，求这些差的所有因数，这样就得到了所有可能的L，再判断这些L是否合法。

如果去重后n<4，则直接输出min(a[i])/4即可。