

soft- $O(1)$ 类数据结构的应用（入门）

Inaba_Meguru

华南师范大学附属中学

2024/10/17

数据结构简介

数据结构通过一定的结构去维护数据。

根据不同的维护类型需要不同的数据结构。

NOIP 以下考试中只会考 $\log$ 类数据结构（线段树、平衡树、珂朵莉树等）。

我们远远低估了中国选手的数据结构水平。

——xiaolilsq

线段树的形态与基本操作

线段树简化版叫树状数组（BIT）。是深度为 $\mathcal{O}(\log n)$ 的二叉树。

通过线段树，我们能快速维护区间的信息。

基本操作有合并和分裂、可持久化（都需要动态开点）。

例题：The Classic Problem

给一个 n 点 m 边的图，第 i 条边权值为 2^k 。求 s 到 t 的最短路。

$n, m \leq 2 \times 10^5$ 。

二维数点

一般采用扫描线方法。

扫描线，顾名思义我们拿一个 $i = 1, 2, 3, \dots$ ，来扫描 x 轴。

例题：「KDOI-10」超级演出

题面请自行查阅。

维护信息和懒标记

我们举几个例子来思考我们到底需要怎么样的信息和懒标记：

- 区间覆盖，查询区间和；
- 单点修改，区间查询有多少个 abc 子序列；
- 两个序列 a, b 。维护 a, b 区间加，区间查询 $\sum_{i=l}^r a_i b_i$ 。

例题：历史和线段树

对一个初始为 0 的序列。维护区间加，查询区间每个版本的和的和。

$$n, q \leq 2 \times 10^5。$$

例题：NOIP 2022 T4 比赛

给定序列 a, b 。 q 个询问，给定 l, r 查询：

$$\sum_{l \leq x \leq y \leq r} \max_{i=x}^y a_i \max_{i=x}^y b_i$$

$n, q \leq 2.5 \times 10^5$ 。

势能思想

以物理的视角，我们可以通过给序列来搞一个势能，每进行一次运算势能有所下降。那么时间复杂度就和势能精密相关。

例题：区间除以 2 向下取整，查询区间和。 $n, q \leq 2 \times 10^5$ 。

例子：吉老师线段树

给定序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。维护三种操作：

■ 对 $i \in [l, r]$, $a_i \leftarrow \min(a_i, x)$;

■ 求 $\max_{i=1}^r a_i$;

■ 求 $\sum_{i=l}^r a_i$;

$n, q \leq 2 \times 10^5$ 。

例题：「Ynoi 2022」堕天作战 TEST_98

给定一个长为 n 的序列 a ，有两种操作，共 m 次：

- 给定 $l\ r\ x$ ，对于所有 i 满足 $l \leq i \leq r$ 且 $a_i \neq x$ ，
 $a_i \leftarrow a_i - x$ 。

- 给定 $l\ r$ ，求对于所有 i 满足 $l \leq i \leq r$ 且 $a_i \neq 0$ ， a_i 的和。
 $n, m \leq 5 \times 10^5$ 。

FHQ 的形态和基本操作

FHQ-Treap 是无旋 Treap，通过给随机权值维护大根堆，给目标元素维护 BST 做到深度期望 $\mathcal{O}(\log n)$ 。
基本操作有：分裂，合并。

FHQ 的使用条件

在某个角度下其怎么操作总保持问题的相对关系。
看几个例子，判断能不能上平衡树：

- 区间加，区间乘；
- 区间加，问全局第 k 大；
- 给一个序列，每次交换两个区间，求区间和。

例题：「Ynoi 2002」Optimal Ordered Problem Solver

给定 n 个点 $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ ，你需要按顺序处理 m 次操作。每次操作给出 o, x, y, X, Y ，

- 首先进行修改：
 - 若 $o = 1$ 则将满足 $x_i \leq x, y_i \leq y$ 的点的 y_i 修改为 y ；
 - 若 $o = 2$ 则将满足 $x_i \leq x, y_i \leq y$ 的点的 x_i 修改为 x 。
 - 然后进行查询，询问满足 $x_i \leq X, y_i \leq Y$ 的点数。
- $1 \leq n, m \leq 10^6$ 。

例题：「KDOI-05」简单的图上问题

给你一个 n 个点 m 条边的边双连通图，并且给定了每个点的坐标，保证每条边不相交或者只在端点处重合。

给定 k 个图上的简单环 $C_1, C_2, \dots, C_k$ ，定义 G_i 为只考虑 C_i 内部的点和边所组成的图。

对 $S \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$ ，定义 $f(S)$ 表示所有 G_{s_i} 交的连通块数量。

有 q 个询问，每次给出一个 z ，输出 $\sum_{S \subseteq \{1, 2, \dots, k\}, |S|=z} f(S)$ 。对 998244353 取模。

$1 \leq n, \sum l_i \leq 10^5, 1 \leq m \leq 3n - 6$ 。

扩展阅读

建议学习：珂朵莉树。