

NOIP 模拟赛 题解

Inaba Meguru

2023.10.23

(1)

赞助: By AFSSCNU, yuzusoft。

Over All

T1 有点折磨人, T2 考得比较奇怪, T3 偏难, T4 偏易。

A. 好多简单题

标签: 数学, 推式子, 签到。

首先 $A+B=$ 的部分长度是固定的, 我们只需要算有多少组合法的 (A, B) 即可。我们重点在算 c 的长度和。

不妨设 $n \leq m$ 。那么 c 的长度只可能是 $m, m+1$ 。我们考虑有多少种情况为 $m+1$ 。当且仅当 $A+B \geq 10^m$ 。

也就是我们要对下面这个东西数数:

$$A \in [10^{n-1}, 10^n - 1], B \in [10^{m-1}, 10^m - 1], A + B \geq 10^m \quad (2)$$

一种聪明做法是差分值域, 转换成四个子问题求解。比较笨的做法是分讨 $n = m$ 和 $n \neq m$ 两种情况。最后都会有等差数列求和。

时间复杂度: $\mathcal{O}(T)$ 。

B. 数据结构在压轴

标签: 动态规划, 数据结构。

假设所有数的和为 s , 那么对于不是全集的 S 都会有 $f(S) + f([n]/S) = s$ 。也就是 $f(S) + f([n]/S)$ 分居 $\frac{s}{2}$ 两侧。

现在我们考虑给这些数加一个 s 求中位数, 答案显然是这些数当中第一个大于 $\frac{s}{2}$ 的数。

暴力背包可以获得 80 分, 如果聪明一点用个 `bitset` 就满分了。

时间复杂度: $\mathcal{O}(n^2 v/w)$ 。

C. 治愈心灵

标签: `ad-hoc`, 圆方树。

首先想要满足条件必须三个颜色同时出现。要反面考虑, 没有简单路径同时经过三种颜色

先考虑树的情况: 可以证明, 存在一个点 u 使得以 u 为根的时候每一个其子树内颜色相同。因此枚举 u , 再容斥一下就可以了, 时间复杂度 $\mathcal{O}(\sum n)$ 。

再考虑普通图的情况, 我们想把普通图转成树, 而且感觉这个问题还和连通性有关。这让我们想到圆方树。如果每一个方点内的边颜色都相等, 我们可以用树的情况解决。否则, 我们考虑不满足这样的特例:

- 如果方点度数为 2，由于无重边，肯定满足。
- 如果度数为 3，即一个 3 元环不满足：
 - 如果有两种颜色，那么剩下一种颜色无论怎么安放都会出现三色路径。
 - 如果有三种颜色，那么每个边所对点的子树与这条边颜色相同。这里有 6 种方案。
- 如果度数 ≥ 4 ，即存在一个 ≥ 4 元环不满足：
 - 如果有两种颜色，和三元环类似的。
 - 如果有三种颜色，这个环已经出现三色路径。

综上，我们可以对圆方树跑树的做法，再特判一下三元环即可。

时间复杂度： $\mathcal{O}(n)$ 。

D. 走向穗织

标签：数据结构。

首先稍加优化的 $\mathcal{O}(nq)$ 算法有 60 分，我没有刻意去卡。

假设 $f^n(x, y)$ 表示从 (x, y) 走 n 步之后到达的城市，特别的 $f^1 = f$ 。我们把城市抽象成一个区间。

首先有一个重要的结论，那就是 $f(l, r) = f(l, l+1) \cup f(l+1, l+2) \cup \dots \cup f(r-1, r)$ 。证明是显然的。

我们更加大胆一点，就会有对任意的 k ，
 $f^k(l, r) = f^k(l, l+1) \cup f^k(l+1, l+2) \cup \dots \cup f^k(r-1, r)$ 。有了这点，我们尝试去维护每个 $l, l+1$ 跳 2^k 步之后到了哪里。这里是可以递推的。

维护完之后，我们拿个 ST 表去维护一下区间最值就可以查询了。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ 。